ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-624-636
УДК 517.911

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНОЙ СТРУКТУРОЙ

© **Н. И. Желонкина**[1,2], **А. Н. Сесекин**[1,2]

[1] ФГБУН «Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН Уральского отделения Российской академии наук»
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: 312115@mail.ru

[2] ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: sesekin@list.ru

Аннотация. В работе приводится обзор результатов авторов, связанных с исследованием свойства устойчивости решений для нелинейных систем дифференциальных уравнений, в правой части которых имеются слагаемые, содержащие произведения разрывных функций на обобщенные. Решения таких систем формализуются с помощью замыкания множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации. Для таких систем получены достаточные условия асимптотической устойчивости невозмущенных решений.
Ключевые слова: нелинейные системы; импульсное воздействие; устойчивость; асимптотическая устойчивость

Введение

Большое количество статей посвящено вопросам устойчивости решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Но абсолютное большинство этих работ при формализации решения используют вариант систем с «толчками», восходящий к работам А.Д. Мышкиса, А.М. Самойлено и Н.А. Перестюка [1], а также многочисленных их последователей (см., например, [2, 3]). Существует и другая формализация понятия решения, которая основана на замыкании множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации [4–6]. Мотивацией такой формализации понятия решения является то, что в реальных механических, электротехнических и других системах изменение значений фазовых переменных происходит не мгновенно, а на весьма небольшом промежутке времени по сравнению с промежутком времени, на котором изучается процесс. В частности, такие явления характерны для механики космического полета (импульсная корректировка орбиты), электротехники (экстратоки в электрических сетях), медицины (изменение состояния организма после принятия лечебных препаратов), экономики (единовременные финансовые вливания в экономику) и др. [4–9]. Фактически система с импульсным воздействием является некоторой аппроксимаций системы с непрерывной траекторией, когда на коротких промежутках времени происходит существенное изменение фазовых переменных. Такой подход, как отмечал Н.Н. Красовский в [10], является естественным с точки зрения теории управления. Отметим, что одной из особенностей формализации решения на основе замыкания множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации является то, что предел у последовательности гладких решений, порожденной гладкими аппроксимациями обобщенных воздействий, может и не существовать, и тогда в качестве решения естественно брать все частичные пределы последовательности гладких решений. В этом случае получается, что одному обобщенному воздействию будет соответствовать целая трубка разрывных решений. В дополнение к сказанному следует отметить обзорную статью [11], где обсуждаются также вопросы формализации решений рассматриваемых уравнений, в частности с позиций теории обобщенных функций. А также отметим работу [12], где рассматривается вопрос устойчивости точек покоя, когда движение системы описывается дифференциальным включением с импульсным воздействием.

Среди возможных подходов к исследованию вопросов устойчивости отметим, что если в исходной системе сделать разрывную замену времени [4, 6], то в вспомогательной системе траектория становится абсолютно непрерывной и вопрос устойчивости можно исследовать с помощью методов, которые применяются для исследования устойчивости систем с переменной структурой (switched systems) [13] в связи с тем, что на временных промежутках, где нет импульсов, траектория будет описываться одними уравнениями, а величина скачка траектории (реакция системы на импульсное воздействие) будет описываться другим уравнением.

Приведенные ниже результаты получены с помощью теории интегральных неравенств, рекуррентных оценок на последовательные непрерывные участки траектории и скачки траектории и метода функций Ляпунова.

1. Формализация понятия решения

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\dot{x} = f(t, x(t), v(t), \check{V}(t)) + B(t, x(t), v(t), \check{V}(t))\dot{v}(t), \qquad x(t_0) = x^0. \tag{1.1}$$

Здесь, $x(t)$ и $v(t)$ n- и m- вектор-функции времени, соответственно, $f(t, x, v, \check{V})$ — n- вектор функция, и $B(t, x, v, \check{V})$ — $n \times m$ матрица-функция, $\check{V}(t) = \underset{[t_0,\, t]}{\operatorname{var}}\, v(\cdot)$, $v(t)$ банахово пространство m-мерных вектор-функций ограниченной вариации $BV_m[t_0, \vartheta]$.

$$\|f(t, x, v, V)\| \le \kappa(1 + \|x\|), \quad \|B(t, x, v, V)\| \le \kappa(1 + \|x\|).$$

Если $v(t)$ является абсолютно непрерывной вектор-функцией, которая определена на отрезке $[t_0, \vartheta]$, то в рамках теоремы Каратеодори решение задачи Коши (1.1) существует и удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), v(s), \check{V}(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} B(s, x(s), v(s), \check{V}(s))\, dv(s). \tag{1.2}$$

При этом второй интеграл (1.2) понимается в смысле Римана–Стилтьеса.

Пусть последовательность $v_k(t)$ абсолютно непрерывных функций $(v_k(t)\in AC[t_0,\vartheta])$ поточечно сходится в функции $v(t) \in BV[t_0,\vartheta]$. Соответствующую последовательность решений задачи Коши (1.1) или (1.2) обозначим $x_k(t)$.

Как и в [4, 5] будем говорить, что последовательность $v_k(t)$ V — сходится к $v(t)$, если $v_k(t)$ поточечно сходится к $v(t)$ и $\operatorname*{var}_{[t_0,\, t]} v_k(\cdot)$ поточечно сходится к $V(t) \in BV[t_0,\vartheta]$. Для данной сходимости будем использовать обозначение $v_k(t) \xrightarrow{V} v(t)$.

Заметим, что для любых a и b, удовлетворяющих неравенству $t_0 \le a \le b \le \vartheta$, выполняется неравенство

$$\operatorname*{var}_{[a,\, b]} v(\cdot) \le V(b) - V(a).$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Назовем $V-$ решением задачи Коши (1.1) всякий частичный поточечный предел последовательности $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ на промежутке $[t_0,\vartheta]$, которая порождает произвольной $V-$ сходящей последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть

$$z(0) = x(\bar{t}),$$

$$\mu(0) = v(\bar{t})$$

являются начальными условиями системы

$$\dot{z}(\xi) = B(t, z(\xi), \mu(\xi), V(t) + \xi - t)\eta(\xi),$$

$$\dot{\mu}(\xi) = \eta(\xi). \tag{1.3}$$

Обозначим через $S(\bar{t}, x(\bar{t}), \Delta v(\bar{t}), V(\bar{t}), \Delta V(\bar{t}))$ (где $\bar{t} = t_i - 0$ или $\bar{t} = t_i$) множество, получающееся сдвигом на величину $-x(t)$ в момент $t + \Delta V(t)$ сечения множества достижимости системы (1.3), что

$$\mu(\bar{t}) = v(\bar{t}), \tag{1.4}$$

где управление $\eta(\xi)$ подчинено ограничению $\|\eta(\xi)\|_1 \le 1$.

Теорема 1.1. *Каждый частичный поточечный предел последовательности* $x_k(t)$ *of решений уравнения* (1.1) *порожденной последовательностью* $v_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, *абсолютно непрерывных функций, где* v_k V*-сходимость к* $v(t) \in BV_m[t_0,\vartheta]$, *и*

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname*{var}_{[t_0,\, t]} v_k(\cdot) = V(t),$$

является решением интегрального включения

$$x(t) \in x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, x(\xi), v(\xi), V(\xi))\, d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} B(\xi, x(\xi), v(\xi), V(\xi))\, dv^c(\xi) +$$
$$+ \sum_{t_i \le t,\, t_i \in \Omega_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), V(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0)) +$$
$$+ \sum_{t_i < t,\, t_i \in \Omega_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0), V(t_i), \Delta V(t_i + 0)), \tag{1.5}$$

где $v^c(\xi)$ *непрерывная составляющая функции ограниченной вариации* $v(\xi)$, $\Omega_-\,(\Omega_+)$ *— соответственно точки левого и правого разрывов функции* $V(t)$.

Для всякого решения $x(t)$ *включения* (1.5), *порожденного парой* $(v(t), V(t)$, *существует последовательность абсолютно непрерывных функций* $v_k(t)$, *поточечно сходящаяся к* $v(t)$ *и для которой* $\lim_{k\longrightarrow\infty} \operatorname*{var}\limits_{[t_0,\,t]} v(\cdot) = V(t)$, *что соответствующая последовательность* $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots,$ *решений системы* (1.1) *поточечно сходится к* $x(t)$.

Доказательство этой теоремы можно посмотреть в [4].

Теперь рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))\dot{v}(t) \tag{1.6}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.7}$$

В отличие от системы (1.1) в (1.6) правая часть не зависит от $V(t)$. Здесь функция $f(\cdot, \cdot)$ со значениями в R^n, матрица-функция $B(\cdot, \cdot)$ размерности $m \times n$. Элементы f и B непрерывна по совокупности переменных в рассматриваемой области и удовлетворяют в ней условиям, обеспечивающим существование и продолжимость решений при любых суммируемых $\dot{v}(t)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем называть аппроксимируемым решением задачи Коши (1.6), (1.7) поточечный предел последовательности гладких решений системы (1.6), порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots,$ поточечно сходящихся к функции ограниченной вариации $v(t)$, если этот предел не зависит от выбора последовательностей функций $v_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1.2. *Пусть в области* $t \in [t_0, \vartheta]$, $x \in R^n$, $||v|| \le M$, *где* M *— некоторая положительная постоянная, все допустимые функции* $v(\cdot)$ *подчинены ограничению* $\operatorname*{var}\limits_{[t_0,\,\vartheta]} v(\cdot) \le M$, *компоненты вектора* $f(t, x)$ *и элементы матрицы* $B(t, x)$ *непрерывны по совокупности переменных, дифференцируемы по всем переменным* x_i, $i \in \overline{1, n}$ *а также удовлетворяют неравенствам*

$$||f(t, x)|| \le \kappa(1 + ||x||), \;\; ||B(t, x)|| \le \kappa(1 + ||x||).$$

Кроме того, будем предполагать, что для всех допустимых t и x будут выполняться равенства

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_{ij}(t,x)}{\partial x_\nu} b_{\nu l}(t,x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_{il}(t,x)}{\partial x_\nu} b_{\nu j}(t,x) \tag{1.8}$$

(условие Фробениуса) $i \in \overline{1,n}$, $j,l \in \overline{1,m}$.

Тогда для всякой вектор-функции $v(t)$, удовлетворяющей выше оговоренным условиям, существует аппроксимируемое решение $x(t)$ задачи Коши (1.6), (1.7), которое удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, x(\xi))\, d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} B(\xi, x(\xi))\, dv^c(\xi) +$$

$$+ \sum_{t_i \le t,\, t_i \in \Omega_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t,\, t_i \in \Omega_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)), \tag{1.9}$$

где

$$S(t, x, \Delta v) = z(1) - x,$$

$$\dot z(\xi) = B(t, z(\xi))\Delta v(t), \quad z(0) = x,$$

$\Omega_-(\Omega_+)$ *— множество точек левого (правого) разрывов вектор-функции $v(t)$,*

$$\Delta v(t-0) = v(t) - v(t-0), \;\; \Delta v(t+0) = v(t+0) - v(t).$$

Доказательство этой теоремы содержится в [4].

О п р е д е л е н и е 1.3. Продолжение решений интегрального включения (1.5) на $[t_0, \infty)$ и интегрального уравнения (1.9) на $[t_0, \infty)$ будем называть решением уравнения (1.1) на промежутке $[t_0, \infty)$.

2. Устойчивость трубок разрывных решений

Обозначим сечение трубки решений интегрального включения (1.5), порожденной начальным условием x_0 и парой функций $v(\cdot)$, $V(\cdot)$ через $X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot))$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что трубка решений уравнения (1.1) $X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot))$ устойчива, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, что если $|\overline{x} - x_0| < \delta$, то

$$\rho(X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot)), X(t, \overline{x}, v(\cdot), V(\cdot))) < \varepsilon,$$

где $\rho(A, B)$ есть хаусдорфово расстояние между множествами A и B.

О п р е д е л е н и е 2.2. Будем говорить, что трубка решений уравнения (1.1) $X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot))$ асимптотически устойчива, если она устойчива, а также справедливо

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \rho(X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot)), X(t, \overline{x}, v(\cdot), V(\cdot))) = 0.$$

Рассмотрим частный случай системы (1.1) – билинейную систему:

$$\dot{x}(t) = (A(t) + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)\dot{v}_i(t))x(t) + f(t)\dot{v}_m + g(t), \tag{2.1}$$

где $A(t)$, $D_j(t)(j \in \overline{1, m-1})$ — непрерывные матрицы размерности $n \times n$, $f(t)$ и $g(t)$ — непрерывные вектор-функции размерности n, $v(t) = (v_1(t), v_2(t), ...v_n(t))^T$, $var_{[t_0,t]}v(t) = \sum_{i=1}^{m} var_{[t_0,t]}v_i(\cdot)$.

Согласно теореме 1.1 все V-решения уравнения (2.1) будут удовлетворять следующему интегральному включению:

$$x(t) \in x^0 + \int_{t_0}^{t} A(\xi)x(\xi)\,d\xi + \int_{t_0}^{t} g(\xi)\,d\xi + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^{t} D_j(\xi)x(\xi)\,dv_i^c(\xi) + \int_{t_0}^{t} f(\xi)\,dv_m^c(\xi) +$$
$$+ \sum_{t_i \le t,\, t_i \in \Omega_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), V(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0)) +$$
$$+ \sum_{t_i < t,\, t_i \in \Omega_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0), V(t_i + 0), \Delta V(t_i + 0)),$$

где $v^c(t)$ – непрерывная составляющая вектор функции ограниченно вариации $v(t)$.

Множество $S(\bar{t}, x(\bar{t}), \Delta v(\bar{t}), V(\bar{t}), \Delta V(\bar{t}))$ (где $\bar{t} = t_i - 0$ $t_i \in \Omega_-$ и $\bar{t} = t_i$ если $t_i \in \Omega_+$) определяется как сдвиг сечения ($\mu(\Delta V(\bar{t})) = v(t_i)$, если $\bar{t}_i \in \Omega_-$, и $\mu(\Delta V\bar{t}) = v(t_i + 0)$, если $\bar{t}_i \in \Omega_+$) множество достижимости систем

$$\dot{z}(\xi) = \sum_{i=1}^{m-1} D_i(\bar{t})z(\xi)\eta_i(\xi) + f(\bar{t})\eta_m(\xi)$$
$$\dot{\mu}(\xi) = \eta(\xi) \tag{2.2}$$

в момент $\xi = \Delta V(\bar{t})$, где управление $\eta(\xi)$ удовлетворяет ограничению $\|\eta(\xi)\| \le 1$, где $\|\eta(\xi)\| = \sum_{i=1}^{m} |\eta_i(\xi)|$.

Теорема 2.1. *Пусть фундаментальная матрица $Y(t,s)$ системы $\dot{x} = A(t)x$ удовлетворяет оценке*

$$\|Y(t,s)\| \le ce^{-(\alpha(t-s))}, \tag{2.3}$$

где α и c некоторые постоянные, такие,что $\alpha > 0$, $c \ge 1$. Кроме того, предположим, что справедлива оценка

$$\|D_j(t)\| \le K, \forall t \in [t_0, \infty), s \in [t_0, t], j \in \overline{1, m-1}. \tag{2.4}$$

Здесь K – положительная постоянная. Предположим, что существует такое число β, что неравенство

$$\alpha(t - t_0) - ck(t - t_0 + V(t)) > \beta \tag{2.5}$$

выполняется для всех $t \in [t_0, \infty)$. Тогда трубка разрывных решений $X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot))$ будет устойчива. Если же выполняется неравенство

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} (\alpha(t - t_0) - ck(t - t_0 + V(t))) = +\infty, \tag{2.6}$$

то трубка разрывных решений будет асимптотически устойчива.

Доказательство приведенной теоремы содержится в работе [14].

3. Устойчивость билинейных систем с разрывными траекториями при устойчивой матрице невозмущенной части системы

Рассмотрим билинейную однородную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = (A(t) + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)\dot{v}_i(t))x(t). \tag{3.1}$$

Здесь $A(t)$ — непрерывная матрица-функция размерности $n \times n$, $D_j(t)$ $(j \in \overline{1,m})$ — непрерывные ограниченные матрицы-функции размерности $n \times n$, $D_i(t)$ — взаимно коммутативны, $v_i(t)$ — компоненты вектор-функции ограниченной вариации $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_m(t))^T$.

Согласно теореме 1.2 всякое аппроксимируемое решение уравнения (3.1) будет удовлетворять интегральному уравнений

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\xi)x(\xi)d\xi + \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t} D_j(\xi)x(\xi)dv_j^c(\xi) +$$

$$+ \sum_{t_i \le t,\, t_i \in W_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t,\, t_i \in W_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)), \tag{3.2}$$

где

$$S(t, x, \Delta v) = z(1) - z(0), \tag{3.3}$$

$$\dot{z}(\xi) = \sum_{j=1}^{m} D_j(t)z(\xi)\,\Delta v_i(t), \qquad z(0) = x, \tag{3.4}$$

W_- и W_+ соответственно точки левого и правого разрывов вектор-функции $v(t)$, $v_i^c(t)$ — непрерывная составляющая функции ограниченной вариации $v_i(t)$, $\Delta v(t-0) = v(t) - v(t-0)$ и $\Delta v(t+0) = v(t+0) - v(t)$. Заметим, что условие Фробениуса (1.8) для уравнения (3.1) превращается в условие взаимной коммутативности матриц $D_i(t)$, $i \in \overline{1,m}$.

Теорема 3.1. *Пусть фундаментальная матрица $Y(t,s)$ системы*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

удовлетворяет оценке

$$\|Y(t,s)\| \leqslant ce^{-\alpha(t-s)}, \ \ c \geqslant 1, \tag{3.5}$$

где α и c — некоторые положительные постоянные. Кроме того, предположим, что справедливы следующие оценки

$$||D_j(t)|| \leqslant K, \, \forall t \in [t_0, \infty), \, j \in \overline{1,m}, \tag{3.6}$$

где K *— положительная постоянная. Тогда если справедливо неравенство*

$$\alpha(t-t_0) - Kc\sum_{j=1}^{m} \operatorname*{var}_{[t_0,\,t]} v_j(\cdot) \geq \beta, \tag{3.7}$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$, *где* β *есть некоторая конечная величина, то нулевое решение системы* (3.1) *устойчиво, если же*

$$\alpha(t-t_0) - Kc\sum_{j=1}^{m} \operatorname*{var}_{[t_0,\,t]} v_j(\cdot) \longrightarrow \infty, \tag{3.8}$$

то нулевое решение системы (3.1) *будет асимптотически устойчивым и будет справедлива оценка*

$$||x(t)|| \leq e^{-(\alpha(t-t_0)-Kc(\operatorname*{var}\limits_{[t_0,\,t]} v(\cdot)))} x(t_0)c. \tag{3.9}$$

Приведенный результат был опубликован в работе [15].

4. Устойчивость билинейных систем с разрывными траекториями при неустойчивой матрице невозмущенной части системы

Приведенный ниже результат опубликован в [16]. В предыдущем разделе свойство устойчивости нулевого решения обеспечивалось за счет асимптотической устойчивости однородной системы без обобщенных воздействий, а обобщенные воздействия играли роль возмущений. В этом разделе мы будем предполагать, что однородная система без импульсных воздействий будет неустойчива, а свойство устойчивости мы будем пытаться обеспечить за счет импульсных воздействий. В отличие от предыдущего раздела здесь будем предполагать, что $v_i(t)$ — компоненты вектор функции $v(t) = (v_1(t), v_2(t), ..., v_m(t))^T$ — кусочно-постоянные функции, непрерывные слева в точках разрыва. Точки разрыва функции $v(t)$ $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$ удовлетворяют условию $\lim_{i\longrightarrow\infty} t_i = \infty$.

При сделанных предположениях на функции $v_i(t)$ систему (3.1) можно записать в виде:

$$\dot{x} = (A(t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty} D_j(t)x(t)\Delta v_j(t_i)\delta(t-t_i), \tag{4.1}$$

где $\Delta v_j(t_i) = v_j(t_i+0) - v_j(t_i)$ — скачки кусочно постоянных функций $v_i(t)$, $\delta(t-t_i)$ — δ — функции Дирака, сосредоточенные в моменты t_i.

Теорема 4.1. *Пусть справедливы неравенства*

$$||\tilde{D}_i(s)|| \leq G_i e^{\lambda_i s} \quad i \in \overline{1,m}, \tag{4.2}$$

где $\tilde{D}_i(s)$ *— нормированная фундаментальная матрица для системы* (3.4), *а также имеет место неравенство*

$$\|Y(t,s)\| \leq ce^{\alpha(t-s)}, \tag{4.3}$$

где $Y(t,s)-$ фундаментальная матрица системы $\dot{x}=A(t)x(t)$. Тогда если выполняется условие

$$\lim_{i\longrightarrow\infty}(i\ln c+\sum_{k=1}^{i}\lambda_k+\alpha(t_i-t_0)=\beta<\infty, \tag{4.4}$$

то система (4.1) *устойчива, а если выполняется условие*

$$\lim_{i\longrightarrow\infty}(i\ln c+\sum_{k=1}^{i}\lambda_k+\alpha(t_i-t_0)=-\infty, \tag{4.5}$$

то система (4.1) *асимптотически устойчива.*

5. Метод функций Ляпунова при исследовании устойчивости систем импульсным воздействием

В этом разделе будем рассматривать нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t))+B(t,x(t))\dot{v}(t) \tag{5.1}$$

с начальным условием $x(t_0)=x_0$. Также будем предполагать, что для системы (5.1) выполняется условие Фробениуса (1.8). Как и в предыдущих двух разделах будем предполагать, что в системе (5.1) обобщенное воздействие порождается кусочно постоянной функцией $v(t)$, точки разрыва этой функции $t_1<t_2<\ldots<t_i<t_{i+1}<\ldots$ удовлетворяют условию $\lim_{k\longrightarrow\infty}t_k=\infty$. Будем считать функцию $v(t)$ непрерывной слева в точках разрыва. В таком случае на промежутке $(t_i,t_{i+1}]$ траектория системы (5.1) будет описываться дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t)) \tag{5.2}$$

с начальным условием $x(t_i+0)$. Величина скачка траектории в точке t_i задается с помощью решения дифференциального уравнения

$$\dot{z}(\xi)=B(t_i,z(\xi))\Delta v(t_i),\quad z(0)=x(t_i), \tag{5.3}$$

формулой $S(t_i,x(t_i),\Delta v(t_i))=z(1)-x(t_i)$, где $\Delta v(t_i)=v(t_i+0)-v(t_i)$.

Пусть $V(t,x)$ — непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова. Производную функции Ляпунова в силу системы (5.2) будем обозначать

$$\dot{V}(t,x)=\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\nabla_x V(t,x)f(t,x),$$

где ∇_x — градиент функции $V(t,x)$ по x. Производную этой функции Ляпунова в силу системы (5.3), описывающей скачек траектории системы (5.1), будем обозначать следующим образом:

$$\dot{V}(t_i,z)=\nabla_x V(t_i,z)B(t_i,z)\Delta v(t_i).$$

Заметим, что система (5.3) является автономной.

Теорема 5.1. *Предположим, что существуют непрерывно дифференцируемая функция* $V(t,x)$ *и непрерывная монотонно возрастающая функция* $u(s)$ $(u(0)=0,$ $s \geq 0)$. *Для функции* $V(t,x)$ *справедливо неравенство*

$$u(||x||) \leq V(t,x) \tag{5.4}$$

для всех $t \geq t_0,\ x \in \mathbb{R}^n$. *Функция* $V(t,x)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\dot{V}(t,x) \leq \alpha V(t,x),\ \ \alpha > 0, \tag{5.5}$$

где $\dot{V}(t,x)$ *— производная в силу системы (5.2),*

$$\dot{V}(t_i,z) \leq -\beta V(t_i,z),\ \ \beta > 0, \tag{5.6}$$

где $\dot{V}(t_i,z)$ *— производная в силу системы (5.3). Кроме того предположим, что существует* $\gamma > 0$, *для которого выполняется неравенство*

$$0 < t_{i+1} - t_i < \gamma,\ \ i = 1,2,..., \tag{5.7}$$

а также неравенство

$$\alpha - \frac{\beta}{\gamma} < 0. \tag{5.8}$$

Тогда система (5.1) *асимптотически устойчива.*

Доказательство этой теоремы приведено в [17].

Заключение. В обзоре приведены результаты об устойчивости невозмущенных решений для нелинейных систем с обобщенным воздействием в правой части. В случае, когда нет единственности реакции системы на обобщенное воздействие, исследовано свойство устойчивости для трубок решений. Если реакция системы на обобщенное воздействие единственна, то исследованы случаи, когда устойчивость обеспечивается системой без импульсов, а импульсы играют роль возмущений, а также рассмотрены случаи, когда система без импульсов неустойчива, а свойство устойчивости обеспечивается за счет импульсных составляющих.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 288 с.

2. *Bainov D.D., Simeonov P.S.* Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. Harlow: Longman, 1993.

3. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989.

4. *Zavalishchin S.T., Sesekin A.N.* Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1997. 268 p.

5. *Сесекин А.Н.* Динамические системы с нелинейной импульсной структурой // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2000. Т. 6. № 2. С. 497-514.

6. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований // Автоматика и телемеханика. 2013. № 12. С. 56-103.

7. *Дыхта В.А.* Импульсное оптимальное управление в моделях экономики и квантовой электроники // Автоматика и телемеханика. 1999. № 11. С. 100-112.

8. *Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

9. *Андрианов Д.Л., Арбузов В.О., Ивлиев С.В., Максимов В.П., Симонов П.М.* Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // Вестник Пермского университета. Серия: Экономика. 2015. № 4 (27). С. 8-32.

10. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.

11. *Дерр В.Я.* Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах: обзор // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения: материалы конф., посвящ. 95-летию со дня рождения проф. Н.В. Азбелева. Пермь, 2017. С. 60-86.

12. *Перейра Ф.Л., Сильва Ж.Н.* Устойчивость по Ляпунову импульсных систем, управляемых мерой // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 8. С. 1059-1067.

13. *Liberzon D., Morse A.* Basic problems in stability and and design of switched systems // IEEE Control Syst. Mag. 1999. Vol. 19. P. 59-70.

14. *Sesekin A.N., Zhelonkina N.I.* The stability of tubes of discontinuous solutions of dynamical systems // AIP. Conference Proceeding. 2017. Vol. 1895. P. 050011 1-7.

15. *Корнилов И.А., Сесекин А.Н.* Об устойчивости линейных систем с матрицей, содержащей обобщенные функции // Вестник УГТУ-УПИ. Екатеринбург, 2004. № 3 (33). С. 386-388.

16. *Желонкина Н.И., Сесекин А.Н.* Об устойчивости линейных систем с импульсным воздействием в матрице системы // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 30-33.

17. *Sesekin A.N., Zhelonkina N.I.* Stability of nonlinear dynamical systems containing the product of discontinuous functions and distributions // AIP. Conference Proceeding. 2016. Vol. 1789. P. 040010 1-8.

Поступила в редакцию 13 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 16 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Желонкина Наталья Игоревна, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, математик; Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры прикладной математики, e-mail: 312115@mail.ru

Сесекин Александр Николаевич, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, зав. кафедрой прикладной математики и механики; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, ведущий научный сотрудник, e-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

Для цитирования: *Желонкина Н.И., Сесекин А.Н.* Об устойчивости решений нелинейных систем с импульсной структурой // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 624–636. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-624-636

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-624-636

ON THE STABILITY OF SOLUTIONS OF NONLINEAR SYSTEMS WITH IMPULSE STRUCTURE

N. I. Zhelonkina[1),2)], **A. N. Sesekin**[1),2)]

[1)] N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS
16 S. Kovalevskaia St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: 312115@mail.ru
[2)] Ural Federal University
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: sesekin@list.ru

Abstract. In this paper we review the results of the authors related to the study of the stability property of solutions for nonlinear systems of differential equations, on the right-hand side of which there are terms containing products of discontinuous functions and distributions. The solutions of such systems are formalized by the closure of the set of smooth solutions in the space of functions of bounded variation. For such systems, sufficient conditions are obtained for the asymptotic stability of unperturbed solutions.
Keywords: nonlinear systems; impulse action; stability; asymptotic stability

REFERENCES

1. Samoylenko A.M., Perestyuk N.A. *Differentsial'nyye uravneniya s impul'snym vozdeystviyem* [Differential Equations with Impulse Action]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1987, 288 p. (In Russian).

2. Bainov D.D., Simeonov P.S. *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications.* Harlow, Longman, 1993.

3. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. *Theory of Impulsive Differential Equations.* Singapore, World Scientific, 1989.

4. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications.* Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1997, 268 p.

5. Sesekin A.N. Dinamicheskiye sistemy s nelineynoy impul'snoy strukturoy [Dynamic systems with nonlinear impulse structure]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2000, vol. 6, no. 2, pp. 497-514. (In Russian).

6. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. Razryvnyye resheniya v zadachakh optimal'nogo upravleniya i ikh predstavleniye s pomoshch'yu singulyarnykh prostranstvenno-vremennykh preobrazovaniy [Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2013, no. 12, pp. 56-103. (In Russian).

7. Dykhta V.A. Impul'snoye optimal'noye upravleniye v modelyakh ekonomiki i kvantovoy elektroniki [Impulse Optimal Control in Economic and Quantum Electronics Models]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1999, no. 11, pp. 100-112. (In Russian).

8. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noye impul'snoye upravleniye s prilozheniyami* [Optimal Impulse Control with Applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 256 p. (In Russian).

9. Andrianov D.L., Arbuzov V.O., Ivliyev S.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Dinamicheskiye modeli ekonomiki: teoriya, prilozheniya, programmnaya realizatsiya [Economic dynamics models: theory, applications, computer aided implementation]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Ekonomika – Perm University Herald. Economy*, 2015, no. 4 (27), pp. 8-32. (In Russian).

10. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniyem. Lineynyye sistemy* [Motion Control Theory. Linear Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p. (In Russian).

11. Derr V.Ya. Obyknovennyye lineynyye differentsial'nyye uravneniya s obobshchennymi funktsiyami v koeffitsiyentakh: obzor [Ordinary ordinary differential equations with generalized functions in coefficients: a survey]. *Materialy konferentsii «Funktsional'no-differentsial'nyye uravneniya: teoriya i prilozheniya», posvyashchennoy 95-letiyu so dnya rozhdeniya professora N.V. Azbeleva* [Proceedings of the Conference "Functional and Differentional Equations: Theory and Applications" Dedicated to the 95th Anniversary of Professor N.V. Azbleev]. Perm, 2017, pp. 60-86. (In Russian).

12. Pereira F.L., Silva G.N. Lyapunov stability of measure driven impulsive systems. *Differential Equations*, 2004, vol. 40 (8), pp. 1122-1130.

13. Liberzon D., Morse A. Basic problems in stability and and design of swit·shed systems. *IEEE Control Syst. Mag.*, 1999, vol. 19, pp. 59-70.

14. Sesekin A.N., Zhelonkina N.I. The stability of tubes of discontinuous solutions of dynamical systems. *AIP. Conference Proceeding*, 2017, vol. 1895, pp. 050011 1-7.

15. Kornilov I.A., Sesekin A.N. Ob ustoychivosti lineynykh sistem s matritsey, soderzhashchey obobshchennyye funktsii [On the stability of linear systems with a matrix containing generalized functions]. *Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta-UPI – Bulletin of USTU-UPI*, 2004, no. 3 (33), pp. 386-388. (In Russian).

16. Zhelonkina N.I., Sesekin A.N. On Stability of Linear Systems with Impulsive Action at the Matrix. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, p. 673-676.

17. Sesekin A.N., Zhelonkina N.I. Stability of nonlinear dynamical systems containing the product of discontinuous functions and distributions. *AIP. Conference Proceeding*, 2016, vol. 1789, pp. 040010 1-8.

Received 13 April 2018
Reviewed 16 May 2018
Accepted for press 26 June 2018
There is no conflict of interests.

Zhelonkina Natalia Igorevna, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, the Russian Federation, Mathematician; Ural Federal University, Yekaterinburg, the Russian Federation, Lecturer of the Department of Applied Mathematics, e-mail: 312115@mail.ru

Sesekib Alexander Nikolaevich, Ural Federal University, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Phisics and Mathematics, Head of Department of Applied Mathematics and Mechanics. N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, the Russian Federation, Leading Researcher, e-mail: sesekin@list.ru

For citation: Zhelonkina N.I., Sesekin A.N. Ob ustoychivosti resheniy nelineynyh sistem s impul'snoy strukturoy [On the stability of solutions of nonlinear systems with a impulse structure]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 624–636. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-624-636 (In Russian, Abstr. in Engl.).